PROSIDING SEMINAR NASIONAL LINGKUNGAN LAHAN BASAH
"Meningkatkan Peran Teknologi dan Kecerdasan Buatan dalam Implementasi Ekonomi Sirkuler untuk Mencapai Tujuan Pembangunan Berkelanjutan"
Volume 11 No. 2 – Juni 2026

ANTI SUBGRUPOID FUZZY

Muhammad Kholil[a], Saman Abdurrahman[b]

[a-b]Jurusan Matematika Fakultas MIPA ULM

Email korespondensi: 2111011210001@mhs.ulm.ac.id

ABSTRAK

Himpunan fuzzy adalah pemetaan dari himpunan tak kosong ke interval [0,1]. Seiring perkembangan pengetahuan, konsep himpunan fuzzy dipadukan dengan grupoid sehingga terbentuk subgrupoid fuzzy. Penelitian ini bertujuan membuktikan sifat-sifat anti subgrupoid fuzzy melalui lower level subset yang terkait dengan irisan dua atau lebih subgrupoid fuzzy. Penelitian diawali dengan mengkaji sifat lower level subset pada irisan subgrupoid fuzzy. Hasil penelitian menunjukkan bahwa sifat-sifat anti subgrupoid fuzzy dapat diperoleh melalui lower level subset tersebut. Sifat anti subgrupoid fuzzy antara lain: suatu subset tak kosong dari grupoid G merupakan anti subgrupoid fuzzy jika dan hanya jika subset tersebut adalah subgrupoid. Demikian pula, subgrupoid fuzzy pada G merupakan anti subgrupoid fuzzy jika dan hanya jika lower level subset tak kosong dari irisan dua atau lebih subgrupoid fuzzy tersebut merupakan subgrupoid.

Kata kunci: Grupoid, Subgrupoid, Subgrupoid *Fuzzy*, Anti Subgrupoid *Fuzzy*.

PENDAHULUAN

Aljabar merupakan cabang penting dalam matematika yang mempelajari struktur abstrak serta manipulasi ekspresi matematis. Dalam pendekatan klasik, himpunan hanya mengenal keanggotaan secara biner, yakni suatu elemen dikatakan anggota atau bukan anggota himpunan. Namun, konsep ini terbatas untuk menggambarkan keanggotaan yang lebih kompleks. Untuk mengatasi hal tersebut, Zadeh (1965) memperkenalkan himpunan fuzzy yang memungkinkan elemen memiliki derajat keanggotaan berupa nilai pada interval. Penerapan konsep himpunan fuzzy dalam aljabar membuka perkembangan baru, seperti pengenalan subgrupoid fuzzy oleh Rosenfeld (1971) yang menggabungkan prinsip fuzzy dengan struktur grupoid serta mendefinisikan subgrupoid fuzzy dan ideal fuzzy. Selanjutnya, Biswas (1990) mengembangkan konsep anti subgrup fuzzy, yang merupakan struktur berlawanan dengan subgrup fuzzy. Penelitian ini berfokus pada pengembangan konsep anti subgrupoid fuzzy, yang tidak hanya mempertimbangkan derajat keanggotaan elemen, tetapi juga hubungan dan interaksi antar elemen dalam cakupan yang lebih luas.

Meskipun berbagai studi terbaru telah mengkaji struktur grupoid fuzzy, seperti hypercongruences dalam AG-hypergroupoid fuzzy oleh Khan & Hila (2020), anti fuzzy subgroup oleh Hira dkk. (2023), complex fuzzy subgroupoid oleh Al-Harshni & Alghazzawi (2022), interval-valued intuitionistic fuzzy AG-groupoid oleh Yousafzai dkk. (2023), dan soft groupoid oleh Abdurrahman (2024), belum ada penelitian yang secara eksplisit membahas anti subgrupoid fuzzy. Oleh karena itu, penelitian ini berupaya mengisi kekosongan tersebut dengan mengeksplorasi sifat-

sifat anti subgrupoid fuzzy, termasuk operasi irisan dari lower level subset, dan implikasinya terhadap pengembangan teori aljabar fuzzy. Dengan demikian, diharapkan penelitian ini memberikan kontribusi signifikan terhadap pemahaman dan aplikasi konsep anti subgrupoid fuzzy serta menjadi landasan bagi penelitian lebih lanjut di bidang ini.

TINJAUAN PUSTAKA

Definisi 2.1

Diberikan M adalah himpunan tidak kosong. Operasi biner $*$ pada M adalah fungsi dari $M \times M$ ke M, didefinisikan dalam bentuk $*(a,b) \coloneqq a * b$ untuk setiap $(a,b) \in M \times M$.

Definisi 2.2

Suatu himpunan tidak kosong G disebut grupoid, jika pada G didefinisikan suatu operasi biner $*$ sedemikian sehingga $a * b \in G$, untuk setiap $a, b \in G$.

Definisi 2.3

Diberikan $(G,*)$ adalah grupoid. Subset tidek kosong H dari G adalah subgrupoid dari G, jika $(H,*)$ adalah suatu grupoid.

Definisi 2.4

Diberikan H adalah himpunan bagian grupoid G yang tidak kosong. H akan disebut subgrupoid G jika dan hanya jika $a * b \in H$ untuk setiap $a, b \in H$.

Definisi 2.5

Diberikan G adalah himpunan yang tidak kosong. Suatu subset fuzzy α dari G ke $[0,1]$ didefinisikan sebagai fungsi $\alpha: G \to [0,1]$, yang memetakan setiap elemen dalam G ke suatu nilai dalam interval $[0,1]$.

Definisi 2.6

Diberikan dua subset fuzzy α dan β dalam $F(G)$. Irisan fuzzy antara α dan β, yang dilambangkan sebagai $\alpha \breve{\cap} \beta$, didefinisikan dengan mengambil nilai maksimal dari derajat non-keanggotaan masing-masing elemen dalam G dan Gabungan fuzzy, yang dilambangkan sebagai $\alpha \breve{\cup} \beta$, didefinisikan dengan mengambil nilai minimum dari derajat non-keanggotaan masing-masing elemen dalam G. Secara matematis, dituliskan sebagai:

$$(\alpha \breve{\cap} \beta)(x) \coloneqq maks\,\{\alpha(x), \beta(x)\}, \forall x \in G$$

$$(\alpha \breve{\cup} \beta)(x) \coloneqq min\,\{\alpha(x), \beta(x)\}, \forall x \in G.$$

Definisi 2.7

Misalkan μ adalah sebuah himpunan fuzzy dari S. Untuk $t \in [0,1]$, maka lower level subset dari μ didefinisikan:

$$\bar{\mu}_t = \{x \in S : \mu(x) \leq t\}.$$

Definisi 2.8

Misalkan G adalah suatu grupoid. Suatu subset fuzzy β dari G disebut sebagai anti subgrupoid fuzzy jika dan hanya jika untuk setiap elemen $x, y \in G$, berlaku hubungan:

$$\beta(xy) \leq \text{maks}\,\{\beta(x), \beta(y)\}$$

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilaksanakan dengan prosedur sebagai berikut.

1. Mempelajari dan menjelaskan konsep operasi biner, grupoid, yang terdiri dari definisi grupoid dan subgrupoid.
2. Mempelajari dan menjelaskan subset *fuzzy*, yang terdiri dari definisi subset *fuzzy*, irisan dan gabungan dua subset *fuzzy*, *level* subset dan *lower level* subset.
3. Mempelajari dan menjelaskan definisi subgrupoid *fuzzy*, anti subgrupoid *fuzzy*, ideal, ideal *fuzzy* dan anti ideal *fuzzy*.
4. Membuktikan Proposisi mengenai sifat-sifat dari anti subgrupoid *fuzzy* melalui *lower level* subset yang terkait dengan irisan dua (lebih) anti subgrupoid *fuzzy*.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan disajikan hasil dan pembahasan peneltian, yakni mengenai anti subgrupoid *fuzzy* dan anti ideal *fuzzy*. Pembahasan akan memaparkan berbagai Proposisi relevan beserta pembuktian yang telah dirangkum pada beberapa subbab berikut.

4.1 *Lower Level* Subset

Lower level subset adalah alat yang digunakan sebagai pendekatan untuk membuktikan sifat-sifat pada anti subgrupoid *fuzzy*.

Proposisi 4.1.1

Misalkan S adalah himpunan tak kosong serta μ adalah subset fuzzy dari S. Misalkan μ_t adalah level subset dari μ dan $\bar{\mu}_t$ adalah lower level subset dari μ, maka untuk setiap $t \in [0,1]$ berlaku

(i) $\bar{\mu}_1 = S$

(ii) $\mu_t \cup \bar{\mu}_t = S$

(iii) Jika $t_1 < t_2$ *maka* $\bar{\mu}_{t_1} \subseteq \bar{\mu}_{t_2}$

Bukti.

(i) Berdasarkan Definisi 2.5 karena μ subset *fuzzy* dari S, diperoleh $\mu: S \to [0,1]$. Berdasarkan Definisi 2.7 diperoleh $\bar{\mu}_t = \{x \in S: \mu(x) \leq t\}$. Pilih $t = 1$, diperoleh $\bar{\mu}_1 = \{x \in S: \mu(x) \leq 1\}$. Akibatnya $\bar{\mu}_1 \subseteq S$. Selanjutnya, karena $0 \leq \mu(x) \leq 1$ untuk setiap $x \in S$. Akibatnya untuk setiap $x \in S$ termuat di dalam $\bar{\mu}_1$, sedemikian sehingga $S \subseteq \bar{\mu}_t$. Dengan demikian karena $\bar{\mu}_1 \subseteq S$ dan $S \subseteq \bar{\mu}_1$, akibatnya $\bar{\mu}_1 = S$. ■

(ii) Berdasarkan Definisi 2.50 $\mu_t = \{x \in S : \mu(x) \geq t\}$ dan Definisi 2.7 $\bar{\mu}_t = \{x \in S : \mu(x) \leq t\}$. Berlaku $\mu_t \cup \bar{\mu}_t \subseteq S$, Karena $\mu(x)$ berada pada interval $[0,1]$ untuk setiap $x \in S$. Akibatnya untuk sebarang t pada $[0,1]$, berlaku $0 \leq \mu(x) \leq t$ atau $t \leq \mu(x) \leq 1$ untuk setiap $x \in S$. Dengan demikian setiap elemen $\mu(x) \in S$ akan berada dalam salah satu dari μ_t atau $\bar{\mu}_t$ atau bahkan keduanya. Ini membuktikan seluruh elemen dalam $S \subseteq \mu_t \cup \bar{\mu}_t$, karena $\mu_t \cup \bar{\mu}_t \subseteq S$ dan $S \subseteq \mu_t \cup \bar{\mu}_t$ maka $\mu_t \cup \bar{\mu}_t = S$. ■

(iii) Diambil sebarang $x \in \bar{\mu}_{t_1}$ sedemikian sehingga $\mu(x) \leq t_1$ karena $t_1 < t_2$ maka $\mu(x) \leq t_1 < t_2$ akibatnya $\mu(x) \leq t_2$ oleh karena itu $x \in \mu_{t_2}$. Akibatnya terbukti $\bar{\mu}_{t_1} \subseteq \bar{\mu}_{t_2}$. ■

4.2 Anti Subgrupoid *Fuzzy*

Pada subbab ini akan dibuktikan sifat-sifat anti subgrupoid *fuzzy* sebagai berikut.

Proposisi 4.2.1

Misalkan H adalah subset tidak kosong dari groupoid G dan β merupakan subset fuzzy dari grupoid G yang di definisikan oleh

$$\beta(x) = \begin{cases} s, & x \in H \\ t, & x \notin H \end{cases}$$

untuk setiap $x \in G$ dengan $s < t$. Jika H merupakan subgrupoid dari G maka β merupakan anti subgrupoid fuzzy dari G.

Bukti.

Misalkan H subgrupoid dari grupoid G. Akan dibuktikan subset *fuzzy* α merupakan anti subgrupoid *fuzzy* dari G, artinya untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $(xy) \leq maks\{\beta(x), \beta(y)\}$. Untuk sebarang $x, y \in G$, terdapat tiga kondisi yang memungkinkan, yaitu:

Kasus 1. Untuk $x, y \in H$. Karena H subgrupoid dari G maka $xy \in H$. Oleh karena itu, $\beta(x) = s, \beta(y) = s$ dan $\beta(xy) = s$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \beta(xy) &= s \\ &= maks\,\{s, s\} \\ &= maks\{\beta(x), \beta(y)\} \end{aligned}$$

Kasus 2. Untuk $x \in H$ dan $y \neq H$, diperoleh

$$\begin{aligned} \beta(xy) &\leq t \\ &= maks\,\{s, t\} \\ &= maks\{\beta(x), \beta(y)\} \end{aligned}$$

Kasus 3. Untuk $x, y \neq H$, diperoleh

$$\begin{aligned} \beta(xy) &\leq t \\ &= maks\,\{t, t\} \\ &= maks\{\beta(x), \beta(y)\} \end{aligned}$$

Jadi berdasarkan analisa diatas diperoleh $\beta(xy) \leq maks\{\beta(x), \beta(y)\}$ untuk setiap $x, y \in G$. Dengan kata lain subset *fuzzy* β merupakan subgrupoid *fuzzy* dari G. ■

Kondisi ini sesuai dengan Contoh 2.7.4 dimana H adalah suatu subgrupoid dari grupoid G dan saat $s < t$ dimana $s \in H$ dan $t \notin H$ terbukti β adalah anti subgrupoid *fuzzy*. Selanjutnya kita akan membuktikan proposisi dengan kondisi sebaliknya.

Proposisi 4.2.2

Misalkan H adalah subset tidak kosong dari groupoid G dan β merupakan subset fuzzy dari grupoid G yang di definisikan oleh

$$\beta(x) = \begin{cases} s, & x \in H \\ t, & x \notin H \end{cases}$$

untuk setiap $x \in G$ dengan $s < t$. Subset fuzzy β merupakan anti subgrupoid fuzzy dari G maka H merupakan subgrupoid dari G.

Bukti.

diketahui subset *fuzzy* β merupakan anti subgrupoid *fuzzy* dari grupoid G dengan

$$\beta(x) = \begin{cases} s, & x \in H \\ t, & x \notin H \end{cases}$$

Untuk setiap $x \in G$. Akan dibuktikan H merupakan subgrupoid dari G. Diambil sebarang $x, y \in H$, diperoleh $\beta(x) = s$ dan $\beta(y) = s$. Karena β anti subgrupoid *fuzzy* dari G maka $\beta(xy) \leq maks\{\beta(x), \beta(y)\} = maks\{s, s\} = s$. Dengan kata lain, $\beta(xy) \leq s$. Karena $Im(\beta) = \{s, t\}$ dan $s < t$, berarti $\beta(xy) = s$. Akibatnya $xy \in H$. Jadi, berdasarkan Definisi 2.3, diperoleh H merupakan subgrupoid dari G.

Berdasarkan Proposisi 4.2.1 dan Proposisi 4.2.2 Subset *fuzzy* β merupakan anti subgrupoid *fuzzy* dari G jika dan hanya jika H merupakan subgrupoid dari G yang dinyatakan dalam akibat berikut ini.

Akibat 4.2.3

Misalkan H adalah subset tidak kosong dari groupoid G, β merupakan subset fuzzy dari grupoid G yang di definisikan oleh

$$\beta(x) = \begin{cases} s, & x \in H \\ t, & x \notin H \end{cases}$$

untuk setiap $x \in G$ dengan $s < t$. Subset fuzzy β merupakan anti subgrupoid fuzzy dari G jika dan hanya jika H merupakan subgrupoid dari G.

Bukti.

Akibat 4.2.3 terbukti langsung dengan menggunakan Proposisi 4.2.1 dan 4.2.2. ■

Proposisi 4.2.4

Subset fuzzy β dari grupoid G merupakan anti subgrupoid fuzzy dari G jika dan hanya jika lower level subset $\bar{\beta}_t \neq \emptyset$ dari β merupakan subgrupoid dari G, untuk setiap $t \in [0,1]$.

Bukti.

($\Longrightarrow$) Misalkan α merupakan anti subgupoid *fuzzy* dari G. Akan dibuktikan *lower level* subset $\bar{\beta}_t \neq \emptyset$ dari β merupakan subgrupoid dari G. Diambil sebarang $x, y \in \bar{\beta}_t$, berdasarkan Definisi 2.7 diperoleh $\beta(x) \leq t$ dan $\beta(y) \leq t$. Karena β anti subgrupoid *fuzzy* dari G maka menurut Definisi 2.8 diperoleh

$$\beta(xy) \leq maks\,\{\beta(x), \beta(y)\} \leq maks\{t, t\} = t$$

Akibatnya, $\beta(xy) \leq t$ dan menurut Definisi 2.7 maka $xy \in \bar{\beta}_t$, jadi $\bar{\beta}_t \neq \emptyset$ merupakan anti subgrupoid dari G untuk setiap $t \in [0,1]$.

($\Longleftarrow$) Diketahui $\bar{\beta}_t \neq \emptyset$ subgrupoid dari G untuk setiap $t \in [0,1]$. Akan dibuktikan β anti subgrupoid *fuzzy* dari G, yaitu $\beta(xy) \leq maks\,\{\beta(x), \beta(y)\}$ untuk setiap $x, y \in G$. Diambil sebarang $x, y \in G$. Karena $\bar{\beta}: G \to [0,1]$ adalah fungsi, maka terdapat $s, r \in [0,1]$ sedemikian sehingga $\beta(x) = s$ dan $\beta(y) = r$. Misalkan $p = maks\,\{s, r\}$. Berarti $s \leq p$ dan $r \leq p$. Dengan kata lain $x \in \beta_p$ dan $y \in \beta_p$. Karena untuk setiap $t \in [0,1]$, berlaku $\bar{\beta}_t$ adalah subgrupoid dari G, akibatnya $\bar{\beta}_t$ adalah subgrupoid dari G sedemikian sehingga $xy \in \bar{\beta}_t$ Oleh karena itu, menurut definisi 2.4

$$\beta(xy) \leq p = maks\{s, t\} = maks\{\beta(x), \beta(y)\}.$$

Jadi, β anti subgrupoid *fuzzy* dari G untuk setiap $x, y \in G$. Berdasarkan analisa di atas, Proposisi 4.2.4 terbukti. ■

Selanjutnya, akan dibuktikan Proposisi irisan dari dua anti subgrupoid *fuzzy* merupakan anti subgrupoid *fuzzy* dari G berikut ini.

Proposisi 4.2.5

JiIka α dan β merupakan anti subgrupoid fuzzy dari G, maka $\alpha \tilde{\cap} \beta$ adalah anti subgrupoid fuzzy dari G.

Bukti.

Misalkan α dan β merupakan anti subgrupoid *fuzzy* dari G, berdasarkan Definisi 2.8 untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\begin{aligned}(\alpha \tilde{\cap} \beta)(xy) &= maks\,[\alpha(xy), \beta(xy)] \\ &\leq maks\,[maks\,\{\alpha(x), \alpha(y)\}, maks\,(\beta(x), \beta(y)\}] \\ &= maks\,[maks\,\{\alpha(x), \beta(x)\}, maks\,\{\alpha(y), \beta(y)\}] \\ &= maks\,[(\alpha \tilde{\cap} \beta)(x), (\alpha \tilde{\cap} \beta)(y)\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $\alpha \tilde{\cap} \beta$merupakan anti subgrupoid *fuzzy* dari G. ■

Selanjutnya, berdasarkan Proposisi 4.2.4 dan Proposisi 4.2.5 *level* subset dari dua irisan anti subgrupoid *fuzzy* dari G yang dinyatakan dalam akibat berikut ini.

Akibat 4.2.6

Misalkan α dan β adalah anti subgrupoid fuzzy dari grupoid G. Irisan α dan β merupakan anti subgrupoid fuzzy dari G jika dan hanya jika $\overline{(\alpha \breve{\cap} \beta)_t} \neq \emptyset$ merupakan subgrupoid dari G.

Bukti.

($\Rightarrow$) Diketahui α dan β adalah anti subgrupoid *fuzzy* dari grupoid G. Berdasarkan Proposisi 4.2.5 $\alpha \breve{\cap} \beta$ merupakan anti subgrupoid *fuzzy* dari G. Akibatnya berdasarkan Proposisi 4.2.4, diperoleh $\overline{(\alpha \breve{\cap} \beta)_t} \neq \emptyset$ merupakan subgrupoid dari G, untuk setiap $t \in [0,1]$.

($\Leftarrow$) Diketahui $\overline{(\alpha \breve{\cap} \beta)_t} \neq \emptyset$ merupakan subgrupoid dari G. untuk setiap $t \in [0,1]$. Berdasarkan Proposisi 4.2.4, $\alpha \breve{\cap} \beta$ merupakan anti subgrupoid *fuzzy* dari G. Berdasarkan Analisa di atas, maka Akibat 4.2.6 terbukti. ■

Proposisi 4.2.7

Jika $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(n)}$ merupakan anti subgrupoid fuzzy dari grupoid G maka

$$\beta^{(1)} \breve{\cap} \beta^{(2)} \breve{\cap} \dots \breve{\cap} \beta^{(n)}$$

Merupakan anti subgrupoid fuzzy dari grupoid G.

Bukti.

Diketahui $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(n)}$ merupakan anti subgrupoid *fuzzy* dari grupoid G. Akan dibuktikan bahwa $\beta^{(1)} \breve{\cap} \beta^{(2)} \breve{\cap} \dots \breve{\cap} \beta^{(n)}$ merupaka anti subgrupoid *fuzzy* dari G menggunakan induksi matematika untuk bilangan $n \geq 2$.

1. Untuk $n = 2$

   Misalkan $\beta^{(1)}$ dan $\beta^{(2)}$ merupaan anti subgupoid *fuzzy* dari G, akibatnya berdasarkan Proposisi 4.2.5 $\beta^{(1)} \breve{\cap} \beta^{(2)}$ merupakan anti subgrupoid *fuzzy* dari G.

2. Asumsikan untuk $n = k, \beta^{(1)} \breve{\cap} \beta^{(2)} \breve{\cap} \dots \breve{\cap} \beta^{(k)}$ merupakan anti subgrupoid *fuzzy* dari G. Akan dibuktikan untuk $n = k+1, \beta^{(1)} \breve{\cap} \beta^{(2)} \breve{\cap} \dots \breve{\cap} \beta^{(k)} \breve{\cap} \beta^{(k+1)}$ merupakan anti subgrupoid *fuzzy* dari G.

   Karena

   $$\begin{aligned} \beta^{(1)} \breve{\cap} \beta^{(2)} \breve{\cap} \dots \breve{\cap} \beta^{(n)} &= \beta^{(1)} \breve{\cap} \beta^{(2)} \breve{\cap} \dots \breve{\cap} \beta^{(k)} \breve{\cap} \beta^{(k+1)} \\ &= \left(\beta \breve{\cap} \beta^{(2)} \breve{\cap} \dots \breve{\cap} \beta^{(k)}\right) \breve{\cap} \beta^{(k+1)}. \end{aligned}$$

   Berdasarkan asumsi diketahui $\beta^{(1)} \breve{\cap} \beta^{(2)} \breve{\cap} \dots \breve{\cap} \beta^{(k)}$ dan $\breve{\cap} \beta^{(k+1)}$ merupakan anti subgrupoid *fuzzy* dari G, sehingga berdasarkan Proposisi 4.2.5 diperoleh $\beta^{(1)} \breve{\cap} \beta^{(2)} \breve{\cap} \dots \breve{\cap} \beta^{(k)}$ dan $\breve{\cap} \beta^{(k+1)}$ merupakan anti subgrupoid *fuzzy* dari G. ■

Selanjutnya, berdasarkan Proposisi 4.2.4 dan Proposisi 4.2.7 *lower level* subset dari dua irisan anti subgrupoid *fuzzy* merupakan subgrupoid dari G yang dinyatakan dalam akibat berikut ini.

Akibat 4.2.8

Misalkan $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(n)}$ *adalah anti subgrupoid fuzzy dari grupoid* G. *irisan dari* $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(n)}$ *merupakan anti subgrupoid fuzzy dari* G *jika dan hanya jika* $\overline{(\beta^{(1)} \breve{\cap} \beta^{(2)} \breve{\cap} \dots \breve{\cap} \beta^{(n)})_t} \neq \emptyset$ *merupakan subgrupoid dari* G.

Bukti.

($\Rightarrow$) Diketahui $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(n)}$ adalah anti subgrupoid *fuzzy* dari grupoid G. Berdasarkan Proposisi 4.2.6 $\beta^{(1)} \breve{\cap} \beta^{(2)} \breve{\cap} \dots \breve{\cap} \beta^{(n)}$ merupakan subgrupoid *fuzzy* dari G. Akibatnya berdasarkan Proposisi 4.2.4, diperoleh $\left(\overline{\beta^{(1)} \breve{\cap} \beta^{(2)} \breve{\cap} \dots \breve{\cap} \beta^{(n)}}\right)_t \neq \emptyset$ merupakan subgrupoid dari G, untuk setiap $t \in [0,1]$.

($\Leftarrow$) Jika $\left(\overline{\beta^{(1)} \breve{\cap} \beta^{(2)} \breve{\cap} \dots \breve{\cap} \beta^{(n)}}\right)_t \neq \emptyset$ merupakan subgrupoid dari G untuk setiap $t \in [0,1]$. Maka berdasarkan proposisi 4.2.4 $\beta^{(1)} \breve{\cap} \beta^{(2)} \breve{\cap} \dots \breve{\cap} \beta^{(n)}$ merupakan subgrupoid *fuzzy* dari G.

Berdasarkan analisa di atas, maka Akibat 4.2.8 terbukti.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan, yaitu menentukan dan membuktikan sifat-sifat anti subgrupoid *fuzzy* melalui pendekatan lower level subset, sebagai berikut.

a. suatu subset *fuzzy* α dari grupoid G merupakan anti subgrupoid *fuzzy* jika dan hanya jika subset tak kosong H dari G merupakan subgrupoid.
b. Irisan dari dua atau lebih anti subgrupoid *fuzzy* pada G juga merupakan anti subgrupoid *fuzzy*, dengan catatan bahwa lower level subset dari irisan tersebut merupakan subgrupoid.
c. Dengan demikian, lower level subset berhasil digunakan sebagai pendekatan untuk membuktikan sifat dasar anti subgrupoid *fuzzy*.

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-nya sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik. Penulis menyampaikan terima kasih kepada seluruh pihak yang telah memberikan bimbingan, dukungan, serta bantuan selama proses penyusunan artikel ini, khususnya pimpinan fakultas dan jurusan, dosen pembimbing, para dosen, keluarga, serta rekan-rekan seperjuangan. Semoga segala bantuan dan dukungan yang diberikan mendapat balasan yang berlipat ganda dari Allah SWT.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrahman, S. (2019) *Pegantar Teori GRUP*. Banjarbaru: Zifatama Jawara.

Abdurrahman, S. (2024) 'Soft Groupoid and its Properties', *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*. Edited by P.-F. Pai, 18(2), pp. 203–209.

Al-Harshni, A.A. and Alghazzawi, D. (2022) 'Algebraic Properties of ω,θ -Complex *Fuzzy* Subgroups', *Mathematical Problems in Engineering*. Edited by M. Sarwar, 2022, pp. 1–8. Available at: https://doi.org/10.1155/2022/1426724.

Atanassov, K.T. (2020) 'On Interval Valued Intuitionistic *Fuzzy* Sets', in *Advances in Fuzzy Systems*, pp. 9–25.

Biswas, R. (1990) '*Fuzzy* subgroups and anti *fuzzy* subgroups', *Fuzzy Sets and Systems*. Edited by P.-F. Pai, 35(1), pp. 121–124. Available at: https://doi.org/10.1016/0165-0114(90)90025-2.

Fraleigh, J.B. (2003) 'A First Course In Abstrac Algebra Fraleigh-7ed-2003', *Advances in Fuzzy Systems*. Edited by P.-F. Pai, 2021, pp. 1–9.

Hira, C., Abdurrahman, S. and Thresye, T. (2023) 'Sifat Subgrup Normal Dari Anti Subgrup Normal *Fuzzy*', *Epsilon: Jurnal Matematika Murni Dan Terapan*, 17(1), p. 101. Available at: https://doi.org/10.20527/epsilon.v17i1.9135.

Kandasamy, W.B.V. (2003) 'Groupoids and Smarandache Groupoids', *Advances in Fuzzy Systems*. Edited by P.-F. Pai, 2021, pp. 1–9. Available at: http://arxiv.org/abs/math/0304490.

Khan, W. and Hila, K. (2020) 'Hypercongruences in *fuzzy* AG-hypergroupoids', *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 39(3), pp. 4197–4209. Available at: https://doi.org/10.3233/JIFS-200277.

Malik, D. S., Mordeson, J.N.& S.M.K. (1997) 'Fundamentals of abstract algebra'. Edited by P.-F. Pai.

Mordeson, J., Bhutani, K. and Rosenfeld, A. (2005) *Fuzzy Group Theory*. Berlin: Berlin: Springer.

Rosenfeld, A. (1971) '*Fuzzy* groups', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Edited by P.-F. Pai, 35(3), pp. 512–517. Available at: https://doi.org/10.1016/0022-247X(71)90199-5.

Walpole, R.E. (2010) *Pengantar Statistika*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

Yousafzai, F. *et al.* (2023) 'A new look of interval-valued intuitionistic *fuzzy* sets in ordered AG-groupoids with applications', *AIMS Mathematics*, 8(3), pp. 6095–6118. Available at: https://doi.org/10.3934/math.2023308.

Zadeh, L.A. (1965) '*Fuzzy* sets', *Information and Control*, 8(3), pp. 338–353. Available at: https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X.