

MATRIKS SOFT FUZZY

Saman Abdurrahman^{1*}, Thresye¹, Andriansyah¹

¹ Fakultas MIPA ULM, Jl. A. Yani Km 36, Banjarbaru, Indonesia

*Corresponding author: saman@ulm.ac.id

Abstrak. Pada artikel ini, kami memperkenalkan bentuk relasi dari himpunan *soft fuzzy* ξ_A atas $\mathbb{U}$ dan matriks *soft* berukuran $m \times n$ dengan entri-entrinya pada interval tutup $[0,1]$. Selain itu, pada artikel ini, kami memperkenalkan submatriks *soft* dan proper submatriks *soft fuzzy* dari matriks *soft fuzzy*, gabungan dua matriks *soft fuzzy*, irisan dua matriks *soft fuzzy* dan konplemen suatu matriks *soft fuzzy*. Selanjutnya, pada artikel ini, akan dibahas sifat-sifat dari matriks *soft fuzzy* yang diinduksi dari sifat-sifat pada teori himpunan. Sifat-sifat yang diselidiki meliputi sifat involusi, sifat idempoten, sifat identitas, sifat konplemen, sifat komutatif, sifat asosiatif, sifat De Morgan's, sifat distributif.

Kata kunci: matriks *soft fuzzy*, gabungan, irisan dan konplemen

1. PENDAHULUAN

Perkembangan penelitian pada bidang matematika dari waktu ke waktu semakin banyak variasinya, mulai dari melanjutkan penelitian sebelumnya ataupun mengoreksi penelitian sebelumnya agar menjadi suatu penelitian yang semakin baik.

Seperti hanya, konsep himpunan *soft* yang diperkenalkan oleh (Molodtsov, 1999b), merupakan penelitian lanjutan dan sekaligus mengoreksi dari konsep himpunan *fuzzy* yang diperkenalkan oleh (Zadeh, 1965), padahal konsep himpunan *fuzzy* yang diperkenalkan Zadeh, merupakan koreksi dari konsep himpunan yang ditemukan oleh Georg Cantor (Michael, 2016).

Konsep himpunan *soft* merupakan perumusan dari konsep himpunan *fuzzy*, yang berfungsi untuk menangani ketidakpastian secara parametrik. Himpunan *soft* merupakan koleksi himpunan berparameterisasi - secara intuitif, dikarenakan batas himpunan bergantung pada parameter. Secara formal, himpunan *soft* didefinisikan sebagai pasangan (f, A) dengan f adalah suatu fungsi dari himpunan parameter $A \subseteq E$ ke koleksi subset dari himpunan semesta U .

Berdasarkan definisi himpunan *soft* (f, A) atas himpunan semesta U , banyak peneliti yang mengaplikasikan pada bidang lain, diantara (Article et al., 2016; Çağman & Enginoğlu, 2010a; Inthumathi et al., 2017; Mondal & Pal, 2011; Neog & Sut, 2012; rajan & murugan, 2014; Usha, 2018; Yang & Ji, 2011; Yao et al., 2008), mengkonstruksi suatu definisi relasi *fuzzy* dari himpunan *soft* (f, A) atas himpunan semesta U , yaitu :

$$\mathcal{R}_A = \{(\mu_{\mathcal{R}_A}(u, x) | (u, x)) \mid (u, x) \in U \times \mathbb{E}\},$$

dengan fungsi keanggotaan dari $\mu_{\mathcal{R}_A}$ dituliskan oleh

$$\mu_{\mathcal{R}_A} : U \times \mathbb{E} \rightarrow [0, 1] \text{ dengan } \mu_{\mathcal{R}_A}(u, x) = \mu_{\varepsilon_A}(x)(u).$$

Produk yang dihasilkan dari definisi tersebut adalah matriks *soft* berukuran $m \times n$, jika entri-entri dari matriks berupa elemen di $\{0,1\}$ dan matriks *soft fuzzy* berukuran $m \times n$, jika entri-entri dari matriks berupa elemen di $[0,1]$. Oleh karena itu, salah satu bentuk yang dihasilkan himpunan *soft* (f, A) atas U adalah matriks, baik itu matriks *soft* ataupun matriks *soft fuzzy*.

Pada artikel ini, akan diselidiki sifat elementer dari matriks *soft fuzzy*, yaitu: sifat involusi, sifat idempoten, sifat identitas, sifat konplemen, sifat komutatif, sifat asosiatif, sifat De Morgan's, sifat distributif. Sifat yang diselidiki tersebut diinduksi dari sifat elementer himpunan pada tulisan (Lipschutz, 1998; Michael, 2016).

2. METODE

Permasalahan yang kami angkat pada artikel ini, merupakan bagian dari penelitian utama yang berjudul "Implementasi Matriks Fuzzy Soft Set dalam Pengambilan Keputusan Izin Mendirikan Bangunan pada Lahan Gambut", yang merupakan hasil pendukung yang bersifat teori dan mendukung pada penelitian utama. Oleh karena itu, penelitian yang kami lakukan adalah kajian teori, yang merujuk pada buku ataupun jurnal yang berhubungan dengan teori himpunan, logika matematika, himpunan soft dan matriks soft fuzzy.

Berikut ini, diberikan beberapa notasi yang akan digunakan pada bagian berikutnya, yaitu $\mathbb{U}$ menyatakan himpunan semesta dan $\mathcal{F}(\mathbb{U})$ menyatakan himpunan semua subset fuzzy atas $\mathbb{U}$.

Definisi 2.1. (Feng & Zhou, 2014; Hu et al., 2019; Inthumathi et al., 2017; Molodtsov, 1999a; Petchimuthu et al., 2020; B. Sun & Ma, 2011; Q.-M. Sun et al., 2008; Yang & Ji, 2011) *Jika $\mathbb{U}$ adalah himpunan semesta, himpunan parameter $\mathbb{E}$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{E}$ dan $\varepsilon_{\mathbb{A}}(x)$ adalah subset fuzzy atas $\mathbb{U}$ untuk setiap $x \in \mathbb{E}$, maka himpunan soft fuzzy $\xi_{\mathbb{A}}$ atas $\mathbb{U}$ adalah himpunan yang didefinisikan oleh fungsi $\varepsilon_{\mathbb{A}}$, yaitu:*

$$\varepsilon_{\mathbb{A}}: \mathbb{E} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{U}) \text{ sedemikian sehingga } \varepsilon_{\mathbb{A}}(x) = \emptyset \text{ jika } x \notin \mathbb{A}.$$

Dalam hal ini, $\varepsilon_{\mathbb{A}}$ disebut aproksimasi fungsi dari soft fuzzy $\xi_{\mathbb{A}}$, nilai $\varepsilon_{\mathbb{A}}(x)$ disebut x – elemen dari soft fuzzy $\xi_{\mathbb{A}}$ untuk setiap $x \in \mathbb{E}$, dan $\emptyset$ adalah himpunan fuzzy null. Selain itu, soft set $\xi_{\mathbb{A}}$ atas $\mathbb{U}$ dapat ditulis sebagai

$$\xi_{\mathbb{A}} = \{(x, \varepsilon_{\mathbb{A}}(x)) \mid x \in \mathbb{E}, \varepsilon_{\mathbb{A}}(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{U})\}.$$

Selanjutnya, himpunan semua soft fuzzy atas $\mathbb{U}$, dinotasikan dengan $\mathcal{SF}(\mathbb{U})$.

Definisi 2.2. (Çağman & Enginoğlu, 2010b) *Misalkan $\xi_{\mathbb{A}} \in \mathcal{SF}(\mathbb{U})$.*

- Relasi fuzzy dari $\xi_{\mathbb{A}}$ didefinisikan oleh $\mathcal{R}_{\mathbb{A}} = \{(\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{A}}}(u, x)/(u, x)) \mid (u, x) \in \mathbb{U} \times \mathbb{E}\}$, dengan fungsi keanggotaan dari $\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{A}}}$ dituliskan oleh $\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{A}}}: \mathbb{U} \times \mathbb{E} \rightarrow [0, 1]$ dengan $\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{A}}}(u, x) = \mu_{\varepsilon_{\mathbb{A}}(x)}(u)$.*
- Jika $\mathbb{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $\mathbb{E} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{E}$, maka $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ dapat disajikan dalam bentuk tabel berikut:*

$\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
u_1	$\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{A}}}(u_1, x_1)$	$\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{A}}}(u_1, x_2)$	$\dots$	$\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{A}}}(u_1, x_n)$
u_2	$\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{A}}}(u_2, x_1)$	$\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{A}}}(u_2, x_2)$	$\dots$	$\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{A}}}(u_2, x_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
u_m	$\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{A}}}(u_m, x_1)$	$\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{A}}}(u_m, x_2)$	$\dots$	$\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{A}}}(u_m, x_n)$

- Jika $a_{ij} = \mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{A}}}(u_i, e_j)$, maka didefinisikan suatu matriks*

$$[a_{ij}]_{m \times n} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

yang disebut matriks soft fuzzy berordo $m \times n$ dari soft fuzzy $\xi_{\mathbb{A}}$ atas $\mathbb{U}$.

Menurut Definisi 2.2, himpunan soft fuzzy $\xi_{\mathbb{A}}$ merupakan karakteristik dari matriks $[a_{ij}]_{m \times n}$. Ini berarti, himpunan soft fuzzy $\xi_{\mathbb{A}}$ secara formal sama dengan matriks soft fuzzy $[a_{ij}]_{m \times n}$. Oleh karena itu, kita akan mengidentifikasi soft fuzzy dengan matriks soft fuzzy dan menggunakan dua konsep ini, yang dapat saling menggantikan.

Koleksi dari matriks soft fuzzy berordo $m \times n$ atas $\mathbb{U}$ dinotasikan dengan $\mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Selanjutnya, penulisan $[a_{ij}]_{m \times n}$ dinyatakan dengan $[a_{ij}]$. Kondisi $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$, menyatakan bahwa $[a_{ij}]$ suatu matriks soft fuzzy berordo $m \times n$ dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$.

Berikut disajikan jenis-jenis matriks soft fuzzy, berdasarkan entri-entri penyusun matriks soft fuzzynya.

Definisi 2.3. (Çağman & Enginoğlu, 2010b) *Jika $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$, maka $[a_{ij}]$ disebut:*

- Matriks soft fuzzy nol, dinotasikan dengan $[0]$, jika $a_{ij} = 0$ untuk setiap i dan j .*

- ii). Matriks soft fuzzy $\mathbb{A}$ –semesta, dinotasikan dengan $[a_{ij}]$, jika $a_{ij} = 1$ untuk setiap $j \in I_{\mathbb{A}} = \{j \mid e_j \in \mathbb{A}\}$ dan i .
- iii). Matriks soft fuzzy semesta, dinotasikan dengan $[1]$, jika $a_{ij} = 1$ untuk setiap i dan j .

Berikutnya disajikan definisi $[a_{ij}]$ adalah submatriks soft fuzzy dari $[b_{ij}]$, dinotasikan oleh $[a_{ij}] \subseteq [b_{ij}]$, $[a_{ij}]$ adalah proper submatriks soft fuzzy dari $[b_{ij}]$, dinotasikan oleh $[a_{ij}] \subset [b_{ij}]$ dan kesamaan matriks soft fuzzy dari $[a_{ij}]$ dan $[b_{ij}]$, dinotasikan oleh $[a_{ij}] = [b_{ij}]$.

Definisi 2.4. Diberikan $[a_{ij}], [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$.

- i). Jika $a_{ij} \leq b_{ij}$ untuk setiap i dan j , maka $[a_{ij}] \subseteq [b_{ij}]$.
- ii). Jika $a_{ij} \leq b_{ij}$ untuk setiap i dan j , terdapat $a_{ij} < b_{ij}$, maka $[a_{ij}] \subset [b_{ij}]$.
- iii). Jika $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j , maka $[a_{ij}] = [b_{ij}]$.

Pada teori himpunan dikenal adanya operasi gabungan $\cup$, irisan $\cap$ dan konplemen, sedangkan pada logika matematika ada disjungsi $\vee$, konjungsi $\wedge$ dan negasi. Dari kondisi tersebut, diinduksi suatu definisi pada matriks soft fuzzy, yaitu: operasi gabungan, operasi irisan dan operasi konplemen, yang berturut-turut dinotasikan oleh $\tilde{\cup}$, $\tilde{\cap}$ dan $[...]^c$.

Definisi 2.5. Diberikan $[a_{ij}], [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Untuk setiap i dan j , didefinisikan:

- i). $[a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}] \stackrel{\text{def}}{=} [a_{ij} \vee b_{ij}]$.
- ii). $[a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}] \stackrel{\text{def}}{=} [a_{ij} \wedge b_{ij}]$.
- iii). $[a_{ij}]^c \stackrel{\text{def}}{=} [1 - a_{ij}]$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut disajikan sifat-sifat yang diinduksi dari sifat elementer teori himpunan, diawali dengan sifat involusi. Sifat involusi adalah salah satu sifat yang dimiliki oleh suatu himpunan A dalam semesta U , yaitu: $(A^c)^c = A$. Kondisi ini, yang mendasari munculnya sifat involusi pada matriks soft fuzzy, seperti disajikan pada proposisi berikut ini.

Proposisi 3.1. Jika $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$, maka $([a_{ij}]^c)^c = [a_{ij}]$.

Bukti:

Diambil sebarang $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Berdasarkan Definisi 2.5 bagian (iii), untuk setiap i dan j , diperoleh:

$$([a_{ij}]^c)^c = [1 - a_{ij}]^c = [1 - (1 - a_{ij})] = [a_{ij}]. \blacksquare$$

Suatu himpunan sebarang merupakan himpunan bagian bagi dirinya sendiri, dan himpunan kosong adalah himpunan bagian dari setiap himpunan. Dari fakta sifat himpunan ini, memunculkan suatu pertanyaan. Apakah sifat ini bisa berlaku pada matriks soft fuzzy atau tidak? Dari pertanyaan ini, memunculkan sifat dari matriks soft fuzzy yang analog dengan sifat himpunan tersebut, seperti yang disajikan pada proposisi berikut ini.

Proposisi 3.2. Jika $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$, maka $[a_{ij}] \subseteq [a_{ij}]$ dan $[0] \subseteq [a_{ij}]$

Bukti:

Diambil sebarang $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Karena $a_{ij} \in \{0,1\}$, untuk setiap i dan j selalu dipenuhi kondisi:

$$a_{ij} \leq a_{ij} \text{ dan } 0 \leq a_{ij}.$$

Oleh Karena itu, berdasarkan Definisi 2.4, diperoleh: $[a_{ij}] \subseteq [a_{ij}]$ dan $[0] \subseteq [a_{ij}]$. ■

Berdasarkan hasil analisa proposisi 3.2, sifat yang ditanyakan kebenarannya di atas, dipenuhi oleh matriks soft, dengan kondisi matriks soft fuzzy nol $[0]$ analog dengan himpunan kosong $\emptyset$ pada teori himpunan.

Berikutnya disajikan sifat yang menghubungkan antara matriks soft fuzzy nol $[0]$, matriks soft fuzzy $[a_{ij}]$ dan matriks soft fuzzy semesta $[1]$ pada $\mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$.

Proposisi 3.3. Jika $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$, maka $[0] \subseteq [a_{ij}] \subseteq [1]$.

Bukti:

Diambil sebarang $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Mengingat $a_{ij} \in \{0, 1\}$ untuk setiap i dan j , dipenuhi kondisi:

$0 \leq a_{ij} \leq 1$. Akibatnya, berdasarkan Definisi 2.4, diperoleh: $[0] \subseteq [a_{ij}] \subseteq [1]$. ■

Relasi subset $\subseteq$ pada teori himpunan bersifat transitif, yaitu: jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$. Kondisi ini, memunculkan pertanyaan berikutnya, apakah relasi subset $\subseteq$ pada matriks soft juga berlaku sifat transitif atau tidak?. Untuk menjawab pertanyaan tersebut, disajikan proposisi berikut ini.

Proposisi 3.4. Diberikan $[a_{ij}], [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Jika $[a_{ij}] \subseteq [b_{ij}]$ dan $[b_{ij}] \subseteq [c_{ij}]$, maka $[a_{ij}] \subseteq [c_{ij}]$.

Bukti:

Diambil sebarang $[a_{ij}], [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Misalkan untuk setiap i dan j , dipenuhi kondisi:

$$[a_{ij}] \subseteq [b_{ij}] \text{ dan } [b_{ij}] \subseteq [c_{ij}].$$

Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.4, untuk setiap i dan j , dipenuhi kondisi: $a_{ij} \leq b_{ij}$ dan $b_{ij} \leq c_{ij}$.

Karena relasi $\leq$ bersifat transitif pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, yang mengakibatkan dipenuhi kondisi:

$a_{ij} \leq c_{ij}$. Akibatnya, berdasarkan Definisi 2.4, diperoleh: $[a_{ij}] \subseteq [c_{ij}]$. ■

Analog dengan Proposisi 3.4, berikut disajikan kesamaan dua matriks soft fuzzy pada $\mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$.

Proposisi 3.5. Jika $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$, maka $[a_{ij}] = [b_{ij}]$ dan $[b_{ij}] = [c_{ij}]$ jika dan hanya jika $[a_{ij}] = [c_{ij}]$.

Bukti:

Diambil sebarang $[a_{ij}], [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Misalkan untuk setiap i dan j , dipenuhi kondisi:

$[a_{ij}] = [b_{ij}]$ dan $[b_{ij}] = [c_{ij}]$. Berdasarkan Definisi 2.4, untuk setiap i dan j , dipenuhi kondisi:

$a_{ij} = b_{ij}$ dan $b_{ij} = c_{ij}$. Karena relasi $=$ bersifat transitif pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, yang mengakibatkan dipenuhi kondisi: $a_{ij} = c_{ij}$. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.4, diperoleh: $[a_{ij}] = [c_{ij}]$.

Sebaliknya, untuk setiap $[a_{ij}], [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$ dengan $[a_{ij}] = [c_{ij}]$, maka $a_{ij} = c_{ij}$, untuk setiap i dan j .

Selanjutnya, relasi $=$ bersifat transitif pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, yang mengakibatkan terdapat bilangan real b_{ij} sedemikian sehingga $a_{ij} = b_{ij}$ dan $b_{ij} = c_{ij}$. Akibatnya, berdasarkan Definisi 2.1.7, dipenuhi kondisi:

$[a_{ij}] = [b_{ij}]$ dan $[b_{ij}] = [c_{ij}]$. ■

Analog dengan Proposisi 3.5, berikut disajikan kesamaan dua matriks *soft fuzzy* pada $\mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$.

Proposisi 3.6. Jika $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$, maka $[a_{ij}] \subseteq [b_{ij}]$ dan $[b_{ij}] \subseteq [a_{ij}]$ jika dan hanya jika $[a_{ij}] = [b_{ij}]$.

Bukti:

Diambil sebarang $[a_{ij}], [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$ dengan $[a_{ij}] \subseteq [b_{ij}]$ dan $[b_{ij}] \subseteq [a_{ij}]$ untuk setiap i dan j . Berdasarkan Definisi 2.4, dipenuhi kondisi: $a_{ij} \leq b_{ij}$ dan $b_{ij} \leq a_{ij}$. Oleh karena itu, berdasarkan kesamaan pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, diperoleh: $a_{ij} = b_{ij}$. Akibatnya, $[a_{ij}] = [b_{ij}]$.

Sebaliknya, untuk setiap $[a_{ij}], [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$ dengan $[a_{ij}] = [b_{ij}]$, maka $a_{ij} = b_{ij}$, untuk setiap i dan j . Akibatnya, berdasarkan sifat kesamaan pada bilangan real dipenuhi kondisi: $a_{ij} \leq b_{ij}$ dan $b_{ij} \leq a_{ij}$.

Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.4, dipenuhi kondisi: $[a_{ij}] \subseteq [b_{ij}]$ dan $[b_{ij}] \subseteq [a_{ij}]$. ■

Sifat idempoten adalah salah satu sifat yang dimiliki suatu himpunan A , yang dikaitkan dengan operasi gabungan dan irisan, yaitu: $A \cup A = A$ dan $A \cap A = A$. Dari sifat ini, diinduksi sifat yang lain dari matriks *soft fuzzy*, seperti yang disajikan pada proposisi berikut ini.

Proposisi 3.7. Jika $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$ maka $[a_{ij}] \tilde{\cup} [a_{ij}] = [a_{ij}]$ dan $[a_{ij}] \tilde{\cap} [a_{ij}] = [a_{ij}]$

Bukti:

Diambil sebarang $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Dengan menggunakan kondisi Definisi 2.1.8, untuk setiap i dan j , diperoleh: $[a_{ij}] \tilde{\cup} [a_{ij}] = [a_{ij} \vee a_{ij}] = [a_{ij}]$ dan $[a_{ij}] \tilde{\cap} [a_{ij}] = [a_{ij} \wedge a_{ij}] = [a_{ij}]$. ■

Himpunan A dalam semesta U , mempunyai sifat identitas, yaitu: $A \cup \emptyset = A$ dengan identitas $\emptyset$, $A \cup U = U$ dengan identitas A , $A \cap U = A$ dengan identitas U , dan $A \cap \emptyset = \emptyset$ dengan identitas A . Berdasarkan kondisi ini, dikonstruksi sifat yang lain dari matriks *soft fuzzy*, seperti disajikan pada proposisi berikut ini.

Proposisi 3.8. Jika $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$ maka

- i). $[a_{ij}] \tilde{\cup} [0] = [a_{ij}]$
- ii). $[a_{ij}] \tilde{\cup} [1] = [1]$
- iii). $[a_{ij}] \tilde{\cap} [1] = [a_{ij}]$
- iv). $[a_{ij}] \tilde{\cap} [0] = [0]$

Bukti:

Diambil sebarang $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Dengan menggunakan kondisi Definisi 2.5, untuk setiap i dan j , diperoleh:

- i). $[a_{ij}] \tilde{\cup} [0] = [a_{ij} \vee 0] = [a_{ij}]$
- ii). $[a_{ij}] \tilde{\cup} [1] = [a_{ij} \vee 1] = [1]$
- iii). $[a_{ij}] \tilde{\cap} [1] = [a_{ij} \wedge 1] = [a_{ij}]$
- iv). $[a_{ij}] \tilde{\cap} [0] = [a_{ij} \wedge 0] = [0]$. ■

Sifat konplemen merupakan salah satu sifat yang terpat pada teori himpunan. Dari sifat ini, dapat diturunkan sifat yang lain dari matriks *soft fuzzy*, yaitu:

Proposisi 3.9. Jika $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$ maka

- i). $[a_{ij}] \tilde{\cup} [a_{ij}]^C = [1]$
- ii). $[1]^C = [0]$
- iii). $[a_{ij}] \tilde{\cap} [a_{ij}]^C = [0]$
- iv). $[0]^C = [1]$

Bukti:

Diambil sebarang $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Dengan menggunakan kondisi Definisi 2.5, untuk setiap i dan j , diperoleh:

- i). $[a_{ij}] \tilde{\cup} [a_{ij}]^C = [a_{ij} \vee (1 - a_{ij})] = [1]$
- ii). $[1]^C = [1 - 1] = [0]$
- iii). $[a_{ij}] \tilde{\cap} [a_{ij}]^C = [a_{ij} \wedge (1 - a_{ij})] = [0]$
- iv). $[0]^C = [1 - 0] = [1]$. ■

Sifat komutatif merupakan sifat banyak kita kenal pada operasi penjumlahan dan perkalian pada himpunan bilangan real. Sifat ini juga, dimiliki oleh teori himpunan pada operasi gabungan dan irisan, sehingga dari sifat ini, diturunkan sifat dari matriks *soft fuzzy* yang analog dengan sifat komutatif pada teori himpunan.

Proposisi 3.10 Jika $[a_{ij}], [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$ maka

- i). $[a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}] = [b_{ij}] \tilde{\cup} [a_{ij}]$.
- ii). $[a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}] = [b_{ij}] \tilde{\cap} [a_{ij}]$.

Bukti:

Diambil sebarang $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Dengan menggunakan kondisi Definisi 2.1.8, untuk setiap i dan j , diperoleh:

- i). $[a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}] = [a_{ij} \vee b_{ij}] = [b_{ij} \vee a_{ij}] = [b_{ij}] \tilde{\cup} [a_{ij}]$.
- ii). $[a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}] = [a_{ij} \wedge b_{ij}] = [b_{ij} \wedge a_{ij}] = [b_{ij}] \tilde{\cap} [a_{ij}]$. ■

Sifat asosiatif pada teori himpunan melibatkan operasi irisan atau gabungan dan tiga himpunan, yaitu: untuk sebarang himpunan A, B dan C dalam semesta U , berlaku:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ dan } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Dari sifat ini, diinduksi sifat lain dari matriks *soft fuzzy*, seperti disajikan pada Proposisi 3.11.

Proposisi 3.11. Jika $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$ maka

- i). $([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}]) \tilde{\cup} [c_{ij}] = [a_{ij}] \tilde{\cup} ([b_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}])$.
- ii). $([a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}]) \tilde{\cap} [c_{ij}] = [a_{ij}] \tilde{\cap} ([b_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}])$.

Bukti:

Diambil sebarang $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Berdasarkan Definisi 2.5, untuk setiap i dan j , diperoleh:

- i). $([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}]) \tilde{\cup} [c_{ij}] = [(a_{ij} \vee b_{ij}) \vee c_{ij}]$

$$\begin{aligned}
 &= [a_{ij} \vee (b_{ij} \vee c_{ij})] \\
 &= [a_{ij}] \tilde{\cup} ([b_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}]). \\
 \text{ii). } ([a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}]) \tilde{\cap} [c_{ij}] &= [(a_{ij} \wedge b_{ij}) \wedge c_{ij}] \\
 &= [a_{ij} \wedge (b_{ij} \wedge c_{ij})] \\
 &= [a_{ij}] \tilde{\cup} ([b_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}]). \blacksquare
 \end{aligned}$$

Sifat De Morgan adalah salah satu sifat yang terkenal pada teori himpunan, dari sifat dapat diinduksi sifat lain, diantaranya pada logika matematika. Berdasarkan fakta ini, dinduksi sifat De Morgan pada matriks *soft fuzzy*, yang kebenarannya akan dibuktikan pada Proposisi 3.12.

Proposisi 3.12. Jika $[a_{ij}], [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$ maka

$$\begin{aligned}
 \text{i). } ([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}])^c &= [a_{ij}]^c \tilde{\cap} [b_{ij}]^c \\
 \text{ii). } ([a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}])^c &= [a_{ij}]^c \tilde{\cup} [b_{ij}]^c
 \end{aligned}$$

Bukti:

i). Diambil sebarang $[a_{ij}], [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Berdasarkan Definisi 2.5, untuk setiap i dan j , diperoleh:

$$\begin{aligned}
 ([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}])^c &= [a_{ij} \vee b_{ij}]^c \\
 &= [1 - (a_{ij} \vee b_{ij})] \\
 &= [(1 - a_{ij}) \wedge (1 - b_{ij})] \\
 &= [a_{ij}]^c \tilde{\cap} [b_{ij}]^c.
 \end{aligned}$$

ii). Diambil sebarang $[a_{ij}], [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Berdasarkan Definisi 2.5, untuk setiap i dan j , diperoleh:

$$\begin{aligned}
 ([a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}])^c &= [a_{ij} \wedge b_{ij}]^c \\
 &= [1 - (a_{ij} \wedge b_{ij})] \\
 &= [(1 - a_{ij}) \vee (1 - b_{ij})] \\
 &= [a_{ij}]^c \tilde{\cup} [b_{ij}]^c. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Sifat berikutnya yang dimiliki oleh teori himpunan adalah sifat distributif. Sifat ini, melibatkan dua operasi, yaitu: operasi irisan dan gabungan, dan melibatkan tiga himpunan, yaitu: untuk sebarang himpunan A, B dan C dalam semesta U , berlaku:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ dan } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Dari sifat distributif ini, diturunkan sifat baru pada matriks *soft fuzzy*, seperti disajikan pada proposisi berikut ini.

Proposisi 3.13. Jika $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$ maka

- i). $[a_{ij}] \tilde{\cup} ([b_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}]) = ([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}]) \tilde{\cap} ([a_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}]).$
- ii). $[a_{ij}] \tilde{\cap} ([b_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}]) = ([a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}]) \tilde{\cup} ([a_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}]).$

Bukti:

- i). Diambil sebarang $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Berdasarkan Definisi 2.5, untuk setiap i dan j , diperoleh:

$$\begin{aligned} [a_{ij}] \tilde{\cup} ([b_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}]) &= [a_{ij} \vee (b_{ij} \wedge c_{ij})] \\ &= [(a_{ij} \vee b_{ij}) \wedge (a_{ij} \vee c_{ij})] \\ &= [(a_{ij} \vee b_{ij})] \tilde{\cap} [(a_{ij} \vee c_{ij})] \\ &= ([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}]) \tilde{\cap} ([a_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}]). \end{aligned}$$

- ii). Diambil sebarang $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in \mathbb{M}_{\mathcal{SF}_{m \times n}}$. Berdasarkan Definisi 2.5, untuk setiap i dan j diperoleh:

$$\begin{aligned} [a_{ij}] \tilde{\cap} ([b_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}]) &= [a_{ij} \wedge (b_{ij} \vee c_{ij})] \\ &= [(a_{ij} \wedge b_{ij}) \vee (a_{ij} \wedge c_{ij})] \\ &= [(a_{ij} \wedge b_{ij})] \tilde{\cup} [(a_{ij} \wedge c_{ij})] \\ &= ([a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}]) \tilde{\cup} ([a_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}]). \blacksquare \end{aligned}$$

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil pada pembahasan, matriks *soft fuzzy* mempunyai sifat elementer seperti yang dimiliki oleh teori himpunan, yaitu: sifat involusi, sifat idempoten, sifat identitas, sifat konplemen, sifat komutatif, sifat asosiatif, sifat De Morgan's, dan sifat distributif.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada LPPM ULM yang telah memberikan kesempatan pada kami, untuk melakukan penelitian ini, dan kepada Dinas Perumahan dan Pemukiman Kota Banjarbaru, kami ucapkan terimakasih, atas data yang diberikan kepada kami, sehingga penelitian ini dapat terlaksana.

6. DAFTAR PUSTAKA

- Article, R., Arockiaraj, J. J., & Madhanraj, S. (2016). Fuzzy Soft Matrix Theory and its Multi Criteria Decision Making on Radio Frequency. *International Journal of Mathematics And Its Applications*, 4(4), 137–143. <http://ijmaa.in/>
- Çağman, N., & Enginoğlu, S. (2010a). Soft matrix theory and its decision making. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(10), 3308–3314. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.03.015>
- Çağman, N., & Enginoğlu, S. (2010b). Soft matrix theory and its decision making. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(10), 3308–3314. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.03.015>
- Feng, Q., & Zhou, Y. (2014). Soft discernibility matrix and its applications in decision making. *Applied Soft Computing Journal*, 24, 749–756. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2014.08.042>
- Hu, J., Pan, L., Yang, Y., & Chen, H. (2019). A group medical diagnosis model based on intuitionistic fuzzy soft sets. *Applied Soft Computing*, 77, 453–466. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.asoc.2019.01.041>

- Inthumathi, V., Chitra, V., & Jayasree, S. (2017). Fuzzy soft min-max decision making and its applications. In P. Nath (Ed.), *Current Scenario in Pure and Applied Mathematics* (Vol. 9, Issue 3, pp. 827–834). RGN Publications. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.26713%2Fjims.v9i3.948>
- Lipschutz, S. (1998). Set and Basic Operations on Sets. In *Schaum's Outline of Theory and Problems of Set Theory* (2nd ed, pp. 1–33). The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Michael, L. O. (2016). Set theory. In *A First Course in Mathematical Logic and Set Theory* (pp. 117–161). Jhon Wiley & Sons, Inc.
- Molodtsov, D. (1999a). Soft Set Theory First Results. *An International Journal Computers and Mathematics with Applications*, 37, 19–31.
- Molodtsov, D. (1999b). Soft set theory first results. *Journal Computers and Mathematics with Applications*, 37(4–5), 19–31. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(99\)00056-5](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0898-1221(99)00056-5)
- Mondal, S., & Pal, M. (2011). Soft matrices. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*, 7(13), 379–388. <https://doi.org/https://doi.org/10.5897/AJMCSR.9000057>
- Neog, T. J., & Sut, D. K. (2012). On Fuzzy Soft Matrix Theory. *International Journal of Mathematical Archive*, 3(2), 491. www.ijma.info
- Petchimuthu, S., Garg, H., Kamacı, H., & Atagün, A. O. (2020). The mean operators and generalized products of fuzzy soft matrices and their applications in MCGDM. *Computational and Applied Mathematics*, 39(2), 1–32. <https://doi.org/10.1007/s40314-020-1083-2>
- rajan, R. N., & murugan, K. B. (2014). Decision Making Approach for Solving Fuzzy Soft Matrix. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 10(2), 99–104. <https://doi.org/10.14445/22315373/ijmtt-v10p516>
- Sun, B., & Ma, W. (2011). Soft fuzzy rough sets and its application in decision making. *Artificial Intelligence Review*, 41(1), 67–80. <https://doi.org/10.1007/s10462-011-9298-7>
- Sun, Q.-M., Zhang, Z.-L., & Liu, J. (2008). Soft Sets and Soft Modules. In G. Wang, T. Li, J. W. Grzymala-Busse, D. Miao, A. Skowron, & Y. Yao (Eds.), *Rough Sets and Knowledge Technology* (pp. 403–409). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-540-79721-0_56
- Usha, S. (2018). Fuzzy Soft Matrices Applied In Yoga On Hemorrhoid. 7(10), 32–36.
- Yang, Y., & Ji, C. (2011). Fuzzy soft matrices and their applications. In H. Deng, D. Miao, J. Lei, & F. L. Wang (Eds.), *Artificial Intelligence and Computational Intelligence* (pp. 618–627). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-642-23881-9_79
- Yao, B. X., Liu, J. L., & Yan, R. X. (2008). Fuzzy soft set and soft fuzzy set. *Proceedings - 4th International Conference on Natural Computation, ICNC 2008*, 6, 252–255. <https://doi.org/10.1109/ICNC.2008.137>
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)

