

ESTIMASI MODEL REGRESI NONPARAMETRIK DENGAN METODE *B-SPLINE*

Nur Salam^{1,*}, Yuana Sukmawaty¹, Annisa Halida²

¹Dosen Program Studi Statistika, ULM, Jl. A.Yani km.35,6 Banjarbaru, Banjarmasin, Indonesia.

²Mahasiswa Program Studi Statistika, ULM, Jl. Murung Raya, Palangkaraya, Indonesia.

*Penulis korespondensi: n_salam@ulm.ac.id

Abstrak. Analisis regresi merupakan teknik statistik yang digunakan untuk menjelaskan hubungan antara variabel bebas (X) dengan variabel tak bebas (Y). Salah satu model dalam analisis regresi adalah model regresi nonparametrik dengan asumsi bentuk fungsi regresinya tidak diketahui. Untuk mengestimasi fungsi regresi yang tidak diketahui tersebut dapat dilakukan melalui metode pendekatan *spline*. *Spline* atau B-Spline adalah potongan-potongan polinomial, yang polinomial memiliki sifat tersegmen. Sifat tersegmen ini memberikan fleksibilitas lebih dari polinomial biasa, sehingga memungkinkan untuk menyesuaikan diri secara lebih efektif terhadap karakteristik dari suatu fungsi atau data. Penelitian ini bertujuan untuk mengestimasi model regresi nonparametrik dengan metode B-Spline. Metode penelitian ini menggunakan studi literatur dengan mengumpulkan semua bahan, baik itu buku, jurnal atau referensi lain yang menunjang dan relevan dengan materi yang akan dibahas dan diteliti. Hasil penelitian menunjukkan bahwa estimator dari fungsi regresi pada model regresi nonparametrik yang diperoleh dengan menggunakan metode pendekatan *B-spline* adalah: $\hat{y} = S_{\lambda} y$ dengan $S_{\lambda} = B(B^T B + n \lambda K^T)^{-1} B^T$.

Kata kunci: regresi nonparametrik, estimasi, *B-Spline*

1. PENDAHULUAN

Analisis regresi merupakan salah satu teknik statistik yang digunakan secara luas dalam ilmu pengetahuan terapan. Disamping digunakan untuk mengetahui bentuk hubungan antara dua variabel atau lebih, regresi juga dapat dipergunakan untuk peramalan. Variabel-variabel dalam regresi ada dua jenis yaitu variabel independen (variabel prediktor) dan variabel dependen (variabel respon) (Suparti, 2018).

Ada beberapa pendekatan dalam analisis regresi yaitu pendekatan parametrik dan pendekatan nonparametrik. Pendekatan parametrik adalah pendekatan yang dilakukan jika asumsi bentuk fungsi regresinya diketahui dan bergantung pada parameter, sehingga mengestimasi fungsi regresinya sama dengan mengestimasi parameternya, sedangkan pendekatan nonparametrik dilakukan jika asumsi bentuk fungsi regresinya tidak diketahui (Sudjana, 2000).

Terdapat beberapa metode pendekatan pada regresi nonparametrik, salah satunya adalah metode *B-Spline*. *B-Spline* merupakan model regresi yang mempunyai interpretasi statistik dan visual sangat khusus dan sangat baik disamping itu juga mampu menangani karakter data yang mulus (*smooth*). *B-Spline* dalam regresi nonparametrik mempunyai sifat fleksibel dan mempunyai kemampuan mengestimasi perilaku data yang cenderung berbeda pada interval yang berlainan (Eubank, 1999; Budiantara, 2005). *B-Spline* merupakan potongan (*truncated*) polinomial tersegmen yang kontinu, sehingga memiliki kemampuan menyesuaikan diri lebih efektif dari karakteristik data. Metode *B-Spline* mempunyai keunggulan dalam mengatasi pola data yang menunjukkan naik atau turun yang tajam.

Berdasarkan uraian di atas, peneliti tertarik untuk mengkaji tentang estimasi model regresi nonparametrik, sehingga penelitian ini diberi judul Estimasi model regresi nonparametrik dengan metode *B-Spline*.



2. METODE

Adapun prosedur-prosedur yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan bahan-bahan penelitian yang berhubungan dengan regresi nonparametrik.
2. Mempelajari bahan-bahan yang telah dikumpulkan pada poin (1) di atas.
3. Menjelaskan model regresi nonparametrik dan bentuk modelnya dalam bentuk matriks.
4. Menentukan metode estimasi estimasi dan fungsi regresi nonparametrik dengan metode *B-spline*.
5. Membuat simulasi model estimasi estimasi dan fungsi regresi nonparametrik dengan metode *B-Spline*.
6. Mengaplikasikan hasil estimasi dalam suatu contoh soal ataupun contoh kasus yang ada wilayah di Kalimantan Selatan.
7. Menarik kesimpulan dari hasil pembahasan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Mengestimasi fungsi regresi nonparametrik dilakukan agar memperoleh model yang sesuai dan mendekati model sebenarnya. Ada beberapa teknik estimasi dalam regresi nonparametrik antara lain pendekatan histogram, estimasi kernel, estimasi deret orthogonal, analisis *wavelet* dan estimasi *spline*.

3.1 Fungsi -Fungsi Pendekatan

Pada regresi nonparametrik, bentuk kurva regresinya tidak diketahui, untuk itu dilakukan dengan pendekatan *spline*. *Spline* adalah potongan-potongan polinomial, yang polinomial memiliki sifat tersegmen. Sifat tersegmen ini memberikan fleksibilitas lebih dari polinomial biasa, sehingga memungkinkan untuk menyesuaikan diri secara lebih efektif terhadap karakteristik dari suatu fungsi atau data.

Beberapa jenis *Spline* yang dapat digunakan dalam regresi nonparametrik, yang dikenal sebagai fungsi basis, salah satunya adalah basis *B-Spline* (Suhartono, 2009). Jika fungsi regresi didekati dengan *B-Spline* maka dapat ditulis menjadi (Budiantara dkk, 2006).

$$h(z) = \sum_{i=1}^{m+k} (\alpha_i B_{i-m,m}(z)) \quad \dots(3.1.1)$$

dimana $B_{i-m,m}(z)$ adalah basis dengan orde ke- $(i-m)$ dari titik knot $a < u_1, u_2, \dots, u_K < b$, dengan derajat m dan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+K}$ adalah parameter.

Fungsi *B-Spline* dengan derajat m secara rekursif didefinisikan sebagai berikut:
untuk $m > 1$:

$$B_{j,m}(z) = \frac{z - u_j}{u_{j+m} - u_j} B_{j,m-1}(z) + \frac{u_{j+m+1} - z}{u_{j+m+1} - u_{j+1}} B_{j+1,m-1}(z)$$

untuk $m = 1$

$$B_{j,1}(z) = \begin{cases} 1, & \text{jika } u_j \leq z \leq u_{j+1} \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Untuk mengestimasi parameter α pada persamaan (3.1.1), didefinisikan matriks

$$\mathbf{B}(\lambda) = (B_{j,m}(z_i)) \quad \dots(3.1.2)$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = (1-m), \dots, K$, atau dapat ditulis dalam bentuk matriks berukuran $n \times (m + K)$.

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} B_{(1-m),m}(z_1) & \cdots & B_{k,m}(z_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{(1-m),m}(z_n) & \cdots & B_{k,m}(z_n) \end{bmatrix}$$

3.2. Model Regresi Nonparametrik

Regresi nonparametrik adalah metode yang digunakan untuk mengetahui pola hubungan antara variabel bebas yang tidak diketahui dengan mengasumsikan tentang bentuk fungsinya.

Model regresi nonparametrik sebagai berikut:

$$y_i = f(z_i) + \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad \dots(3.2.1)$$

dan

$$\varepsilon = y - f(Z) \quad \dots(3.2.2)$$

Least Square merupakan suatu metode yang meminimalkan jumlah kuadrat *error*. *Least Square* dapat dinyatakan pada persamaan (1.2.4.2.2). Berdasarkan persamaan (3.2.1), maka persamaan (1.2.4.2.2) dapat dinyatakan dengan:

$$\begin{aligned} R(f) &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \\ R(f) &= n^{-1} \varepsilon_1^2 + n^{-1} \varepsilon_2^2 + \cdots + n^{-1} \varepsilon_n^2 \\ R(f) &= n^{-1} \varepsilon_1 \varepsilon_1 + n^{-1} \varepsilon_2 \varepsilon_2 + \cdots + n^{-1} \varepsilon_n \varepsilon_n \\ R(f) &= n^{-1} (\varepsilon_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n \varepsilon_n) \end{aligned} \quad \dots(3.2.3)$$

Jika diberikan matriks $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$ dan $\varepsilon^T = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_n]$ maka persamaan (3.2.2) di atas dapat

dinyatakan dalam bentuk:

$$R(f) = n^{-1} \left([\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_n] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \right)$$

Sehingga, persamaan (3.2.3) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$R(f) = n^{-1} \varepsilon^T \varepsilon \quad \dots(3.2.4)$$

Substitusi persamaan (3.2.2) ke dalam persamaan (3.2.4) di peroleh (Eubank, 1999)

$$\begin{aligned} R(f) &= n^{-1} (y - f)^T (y - f) \\ R(f) &= n^{-1} (y^T - f^T) (y - f) \\ R(f) &= n^{-1} (y^T y - y^T f + -f^T y + f^T f) \end{aligned} \quad \dots(3.2.5)$$

Hasil $y^T f$ akan berbentuk skalar atau matriks 1x1. Berdasarkan sifat-sifat dari transpose suatu matriks, maka $(y^T f)^T = f^T y$. Karena $y^T f$ adalah skalar atau matriks 1x1, maka transpose dari skalar atau matriks



1×1 akan menghasilkan skalar. Hal ini berakibat $\mathbf{y}^T \mathbf{f} = \mathbf{f}^T \mathbf{y}$ bernilai sama, maka dengan mengambil salah satu bentuknya, persamaan (3.2.5) dapat dinyatakan menjadi:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{f}) &= n^{-1}(\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{f} - \mathbf{f}^T \mathbf{y} + \mathbf{f}^T \mathbf{f}) \\ R(\mathbf{f}) &= n^{-1}(\mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{f} + \mathbf{f}^T \mathbf{f}) \end{aligned} \quad \dots(3.2.6)$$

3.3. Roughness Penalty

Misalkan diberikan sebuah fungsi $f(z)$, yang bentuk kurva dari fungsi tersebut tidak diketahui. Karena fungsinya tidak diketahui, maka dilakukan suatu pendekatan fungsi. Salah satu fungsi pendekatannya adalah basis *Spline* yaitu *B-Spline*. Jadi, jika fungsi regresi f didekati dengan *B-Spline*, maka f dapat di tulis dalam bentuk persamaan (3.2.1).

Jika terdapat K titik knot dengan *B-Spline* berderajat m , maka persamaan (3.2.1) dapat dijabarkan menjadi:

$$\begin{aligned} f(z) &= \alpha_1 B_{1-m,m}(z) + \alpha_2 B_{2-m,m}(z) + \dots + \alpha_{m+K} B_{m+K-m,m}(z) \\ &= \alpha_1 B_{(1-m),m}(z) + \alpha_2 B_{(2-m),m}(z) + \dots + \alpha_{m+K} B_{K,m}(z) \\ &= \begin{bmatrix} B_{(1-m),m}(z) & B_{(2-m),m}(z) & \dots & B_{K,m}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m+K} \end{bmatrix} \\ f(z) &= \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad \dots(3.3.1)$$

Untuk pengamatan sebanyak $i = 1, 2, \dots, n$ maka

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \alpha_1 B_{(1-m),m}(z_1) + \alpha_2 B_{(2-m),m}(z_1) + \dots + \alpha_{m+K} B_{K,m}(z_1) \\ f(z_2) &= \alpha_1 B_{(1-m),m}(z_2) + \alpha_2 B_{(2-m),m}(z_2) + \dots + \alpha_{m+K} B_{K,m}(z_2) \\ &\vdots \\ f(z_n) &= \alpha_1 B_{(1-m),m}(z_n) + \alpha_2 B_{(2-m),m}(z_n) + \dots + \alpha_{m+K} B_{K,m}(z_n) \end{aligned} \quad \dots(3.3.2)$$

Dengan mendefinisikan bahwa $B_{j,m}(z_i) = B_{ij}$ dan $f(z_i) = f_i$, untuk pengamatan sebanyak $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = (1-m), (2-m), \dots, K$ maka persamaan (3.3.2) di atas dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_1 B_{11} + \alpha_2 B_{12} + \dots + \alpha_{m+K} B_{1v} \\ f_2 &= \alpha_1 B_{21} + \alpha_2 B_{22} + \dots + \alpha_{m+K} B_{2v} \\ &\vdots \\ f_n &= \alpha_1 B_{n1} + \alpha_2 B_{n2} + \dots + \alpha_{m+K} B_{nv} \end{aligned} \quad \dots(3.3.3)$$

dengan

$$B_{i1} = B_{(1-m),m}(z_i), B_{i2} = B_{(2-m),m}(z_i), \dots, B_{iv} = B_{K,m}(z_i)$$

Jika diberikan matriks-matriks berikut

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1v} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nv} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m+K} \end{bmatrix}$$

maka persamaan (3.3.3) di atas dapat dinyatakan dalam bentuk matriks :

$$\mathbf{f} = \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha} \quad \dots(3.3.4)$$

Menurut Gyorfy (2002), *Roughness Penalty* dapat dinyatakan sebagai integral dari kuadrat kedua suatu fungsi, atau dapat ditulis dengan $\boldsymbol{\alpha}$:



$$J(z) = \int_a^b [f''(z)]^2 dz \quad \dots(3.3.5)$$

dengan mensubstitusi persamaan (3.3.1) ke (3.3.5), maka diperoleh:

$$\begin{aligned} J(z) &= \int_a^b [f''(z)]^2 dz \\ &= \int_a^b [D^2 f(z)]^2 dz \\ &= \int_a^b [D^2 f(z)][D^2 f(z)] dz \\ &= \int_a^b [D^2 B\alpha][D^2 B\alpha] dz \quad \dots(3.3.6) \end{aligned}$$

Karena hasil dari $B\alpha$ adalah skalar atau matriks 1x1, maka berdasarkan sifat-sifat transpose suatu matriks maka $(B\alpha)^T = \alpha^T B^T$ akan menghasilkan hasil yang sama, yakni berupa skalar atau matriks 1x1. Akibatnya persamaan (3.3.6) di atas dapat dituliskan dengan

$$\begin{aligned} J(f) &= \int_a^b [D^2 \alpha^T B^T][D^2 B\alpha] dz \\ &= \alpha^T \int_a^b [D^2 B^T][D^2 B] dz \alpha \quad \text{sifat – sifat integral} \\ &= \alpha^T K \alpha \quad \dots(3.3.7) \end{aligned}$$

dengan

$$K = \int_a^b [D^2 B][D^2 B^T] dz$$

3.4. Penalized Least Square

Penalized Least Square adalah cara lain untuk mendapatkan estimasi model regresi. Secara umum *Penalized Least Square* diberikan oleh:

$$I_\lambda(f) = R(f) + \lambda J(f) \quad \dots (3.4.1)$$

dimana $R(f)$ merupakan komponen *Least Square*, $J(f)$ merupakan *Roughness Penalty* dan $\lambda \geq 0$ merupakan parameter *smoothing*. Dengan mensubstitusi persamaan (3.2.4) dan (3.3.5) ke dalam persamaan (3.4.1) di atas maka fungsi *Penalized Least Square* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$I_\lambda(f) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - f(z_i))^2 + \lambda \int_a^b [f''(z)]^2 dz \quad \dots(3.4.2)$$

Kemudian dengan mensubstitusi persamaan (3.4.1) dan (3.3.7) ke persamaan (3.4.2), maka diperoleh:



$$I_{\lambda}(f) = n^{-1}(y^T y - 2y^T f + f^T f) + \lambda \alpha^T K \alpha \quad \dots(3.4.3)$$

Karena fungsi regresi didekatkan menggunakan fungsi pendekatan *B-Spline*, dimana vektor fungsi yang dinyatakan pada persamaan (3.3.4), maka substitusi persamaan (3.3.5) tersebut dalam persamaan (3.4.3) di atas menjadi:

$$\begin{aligned} I_{\lambda}(f) &= n^{-1}(y^T y - 2y^T B\alpha + (B\alpha)^T B\alpha) + \lambda \alpha^T K \alpha. \\ I_{\lambda}(f) &= n^{-1}(y^T y - 2y^T B\alpha + \alpha^T B^T B\alpha) + \lambda \alpha^T K \alpha. \end{aligned} \quad \dots(3.4.4)$$

3.5. Estimasi Model Regresi Nonparametrik

Untuk mendapatkan estimasi dari model regresi nonparametrik dengan cara mengestimasi fungsi pada komponen nonparametrik. Fungsi regresi $f(t)$ dinyatakan dengan pendekatan *B-Spline*, maka untuk meminimumkan fungsi *Penalized Least Square* pada persamaan (3.4.4) sama halnya dengan menurunkan $I_{\lambda}(f)$ terhadap α . Kemudian menyamakan hasilnya dengan nol.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\lambda}(f)}{\partial \alpha} &= 0 \\ \frac{\partial (n^{-1}(y^T y - 2y^T B\alpha + \alpha^T B^T B\alpha) + \lambda \alpha^T K \alpha)}{\partial \alpha} &= 0 \\ n^{-1} \frac{\partial (y^T y)}{\partial \alpha} - 2n^{-1} \frac{\partial (y^T B\alpha)}{\partial \alpha} + n^{-1} \frac{\partial (\alpha^T B^T B\alpha)}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial (\alpha^T K \alpha)}{\partial \alpha} &= 0 \\ 0 - 2n^{-1} y^T B + 2n^{-1} \alpha^T B^T B + 2\lambda \alpha^T K &= 0 \end{aligned} \quad \dots(3.5.1)$$

Secara berturut-turut, berdasarkan Teorema-teorema sebelumnya dan dari persamaan (3.5.1) di atas diperoleh:

$$\begin{aligned} -n^{-1} y^T B + n^{-1} \alpha^T B^T B + \lambda \alpha^T K &= 0 \\ -n^{-1} (y^T B)^T + n^{-1} (\alpha^T B^T B)^T + \lambda (\alpha^T K)^T &= 0 \\ -n^{-1} B^T y + n^{-1} B^T B \alpha + \lambda K^T \alpha &= 0 \end{aligned} \quad \dots(3.5.2)$$

Selanjutnya, semua ruas pada persamaan (3.5.2) di atas dikalikan dengan n menjadi:

$$\begin{aligned} -B^T y + B^T B \alpha + n \lambda K^T \alpha &= 0 \\ -B^T y + (B^T B + n \lambda K^T) \alpha &= 0 \\ (B^T B + n \lambda K^T) \alpha &= B^T y \\ \alpha &= (B^T + n \lambda K^T)^{-1} B^T y \end{aligned} \quad \dots(3.5.3)$$

Selanjutnya, karena parameter yang diestimasi hanya α maka dapat diperoleh estimator sebagai berikut ini:

$$\alpha = (B^T + n \lambda K^T)^{-1} B^T y \quad \dots(3.5.4)$$

Karena fungsi regresi dinyatakan sebagai kombinasi linier dari fungsi yang diketahui, maka estimasi fungsi regresi diperoleh dengan mensubstitusi persamaan (3.5.4) kedalam persamaan berikut ini:

$$f = B \alpha$$



$$\begin{aligned}\hat{f} &= B\hat{\alpha} \\ &= B(B^T + n\lambda K^T)^{-1} B^T y \\ &= B(B^T + n\lambda K^T)^{-1} B^T y\end{aligned}\quad \dots(3.5.5)$$

Estimasi model regresi diperoleh dengan mensubstitusi persamaan (3.5.5) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \hat{f} \\ &= B(B^T B + n\lambda K^T)^{-1} B^T y \\ &= S_\lambda y\end{aligned}\quad \dots(3.5.6)$$

dimana $S_\lambda = B(B^T B + n\lambda K^T)^{-1} B^T$.

Untuk mendapatkan estimator model regresi nonparametrik, maka harus dilakukan pengestimasi fungsi parameter pada komponen nonparametrik. Estimasi fungsi pada komponen nonparametrik dilakukan dengan mendekati fungsi nonparametriknya dengan suatu fungsi pendekatan, yaitu fungsi *B-Spline* tersebut dengan menurunkan fungsi *Penalized Least Square* terhadap α dan menyamakan hasilnya dengan nol. Sehingga diperoleh persamaan (3.5.5) di atas sebagai estimator model regresi nonparametrik.

4. SIMPULAN

4.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil pembahasan adalah sebagai berikut:

1. Estimasi fungsi pada komponen nonparametrik dilakukan dengan mendekati fungsi nonparametriknya dengan suatu fungsi pendekatan, yaitu fungsi *B-Spline* tersebut dengan menurunkan fungsi *Penalized Least Square* terhadap α dan menyamakan hasilnya dengan nol. Sehingga diperoleh hasil estimasi model regresi nonparametriknya.
2. Estimasi model regresi nonparametrik diperoleh : $\hat{y} = \hat{f} = S_\lambda y$ dengan $S_\lambda = B(B^T B + n\lambda K^T)^{-1} B^T$.

4.2 Saran

Penelitian yang lebih lanjut dapat dilakukan dengan meneliti estimasi model regresi nonparametrik menggunakan metode lain, seperti metode kernel, *K-nearest neighborhood*, deret ortogonal, analisis *wavelet* dan lain-lain. Serta dapat menerapkannya pada contoh kasus.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih penulis haturkan kepada Universitas Lambung Mangkurat yang telah mendanai penelitian ini melalui dana PNBPU Universitas Lambung Mangkurat tahun anggaran 2021.

6. DAFTAR PUSTAKA

- Eubank, R. L. (1999). *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*. Second edition. Marcel Dekker, New York.
- Gujrati, D.N., & Porter, D.C. (2010). *Dasar-dasar Ekonometrika*. Salemba Empat. Jakarta.
- Hardle, W. (1990). *Applied Nonparametric Regression*, The Syndicate of the Universitas of Cambridge.
- Nizamitdinov, A. & Memmedli, M. (2012). *An Application of Various Nonparametric Techniques by Nonparametric Regression Splines*. Diakses dari <http://www.naun.org/multimedia/NAUN/>.
- Purcell, E.J., & Varberg, D. (1987). *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Edisi ke-5 jilid 1. Erlangga. Jakarta.
- Rodriguez, G. (2001). *Smoothing and Nonparametric Regression*. Diakses 23 Juli 2012.
- Suparti. (2018). *Regresi Nonparametrik*. Cetakan Pertama, WADE Group. Ponorogo, Jawa Timur.



Sudjana, (2000). *Metode Statistika*, Edisi ke-6, PT. Tarsito Bandung.
Walpole, R. E. (1994). *Pengantar Statistik*. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

